

PROJETO DE EXPERIMENTOS DE MISTURAS GENERALIZADO PARA OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS

Pedro José Papandréa^{*a}, Anderson Paulo de Paiva^a, Rafael Coradi Leme^a, Xueping Li^b.

^a Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, UNIFEI, Itajubá – MG

^b University of Tennessee, Department of Industrial and Systems Engineering, Knoxville, Tennessee, USA

RESUMO

Uma das principais preocupações no que se refere a investimentos é a análise de portfólio. Na seleção de uma carteira, o analista deve estar atento à presença de parâmetros de erros de nas suas estimações. Com efeito, tais erros podem levar a um mau desempenho da carteira. A literatura propõe muitas abordagens para analisar as carteiras; uma alternativa interessante foi proposta por Oliveira e seus colegas: design de experimentos com misturas. Este trabalho generaliza a filosofia de projetos de experimentos na análise de portfólio e explora o poder dos projetos experimentais para lidar com os erros de parâmetro estimativos. A abordagem proposta neste artigo conecta - via função desirability - a tradicional teoria de portfólios média-variância com a otimização multi-objetivo. A abordagem lida com erros na estimação de parâmetros e permite que o analista se envolva em um processo de tomada de decisão robusta.

PALAVRAS-CHAVE:

projeto de experimentos,
otimização,
portfólio.

INTRODUÇÃO

Um problema importante e interessante que surge em muitas áreas de pesquisa é como alocar recursos diferentes para criar uma carteira rentável. O principal objetivo dos investidores é bater em, através de uma carteira de investimentos, a melhor estratégia de compra e venda. Alcançar tal estratégia e, assim, projetar um portfólio ótimo tem sido o foco de muitos trabalhos de pesquisa ao redor do mundo. O quadro mais famoso, introduzida por Markowitz (1952) é o modelo de média-variância.

Enquanto as obras seminais de Markowitz (1952, 1959) têm sido exploradas extensivamente, muitos autores têm contribuído para e modificá-los em aspectos importantes. Artzner et al. (1999), por exemplo, investigou medidas coerentes de risco, tais como o valor em risco (VaR), o sistema de margem de análise de portfólio padrão de risco (SPAN), desenvolvido pela Chicago Mercantile Exchange, e as regras de margem da Securities and Exchange Commission (SEC), que são utilizados pela Associação Nacional dos Securities Dealers (NASD). Como uma função objetivo para otimização de portfólio, Rockefeller e Uryasev (2002) propôs a utilização do valor em risco condicional (CVaR). Da mesma forma, outras abordagens de otimização de portfólio têm sido propostas tais como as baseadas em variância-assimetria, curtose (Lai et al, 2006.), Média-variância-skewness (Briec et al, 2007; Kerstens et al, 2011.) ou média-semivariância entropia (Zhang et al., 2012).

Ao resolver o problema da carteira, podem ser utilizadas várias técnicas de otimização. A esta se inclui a programação quadrática (Best, 2010), os métodos de pontos interiores (Gondzio & Grothey, 2007), a programação linear inteira mista (Benati & Rizzi, 2007), a otimização mínima sequencial (Zhang et al., 2009), a programação estocástica (Abdelaziz et al., 2007), as abordagens Bayesianas (Soyer e Tanyeri, 2006), os métodos de inicialização (Bai et al., de 2009, e Leung et al. 2012), algoritmos genéticos

(Lin e Liu, 2008), o algoritmo evolutivo (Brank et al., 2009) e ainda outros. Estas abordagens, no entanto, exigem um grande esforço computacional e/ou os resultados não incorporam um erro de estimação para as ações de ativos ideais. Em tais casos, o investidor deve aplicar exatamente o valor obtido a partir de um modelo matemático. Quando este valor oscila, o lucro máximo pode ser fortemente afetado.

Os erros de estimação, na verdade, desempenham um papel importante na seleção de portfólios. Jobson e Korkie (1980), Michaud (1989), Chopra e Ziemba (1993), e Best e Grauer (1991) discutiram o impacto do erro de estimação na escolha de uma carteira ótima. Para lidar com essa armadilha potencial, os pesquisadores propuseram a otimização robusta, abordagem (Ben-Tal e Nemirovski, 1998; Goldfarb e Iyengar, 2003; Halldórsson e Tutuncu, 2003; Black e Litterman, 1991,1992).

Uma alternativa para todos estes métodos foi recentemente proposta por Oliveira et al. (2011), quando eles sugeriram otimizar carteiras com o auxílio do projeto de experimentos de misturas (MDE). Recentemente, o projeto de experimentos tem sido amplamente utilizado em aplicações relacionadas com a análise de simulação (Kleijnen, 2005). Balestrassi et al. (2009), por exemplo, usou experimentos fatoriais fracionários e fatoriais completos para melhor determinar os parâmetros de uma rede neural artificial (RNA) em um problema não linear de previsão de séries temporais de preços diários de retornos de curto prazo.

Utilizando uma técnica similar, Oliveira et al. (2011) apresentou uma nova abordagem MDE usada para ajustar a métrica do valor em risco condicional (CVaR) para o mix de contratos nos mercados de energia. Neste tipo de estratégia experimental, os fatores de projeto são tratados como as proporções de um sistema de mistura considerado bastante adequado para a análise de carteiras em geral. Ao encontrar a carteira ótima, em vez de usar a programação linear e não linear tradicional diretamente, o conceito da função desirability é considerado para combinar o objetivo de maximização multivariada, maximizando o retorno enquanto minimiza o risco. Neste, no entanto, apenas levemente explora os recursos de otimização de carteiras teóricas. O presente trabalho se esforça para preencher esta lacuna. Ao fazê-lo, generaliza as aplicações da função MDE e desirability da otimização de portfólio de média-variância, isto permite levar em conta as operações de venda a descoberto. Além disso, quando o MDE foi proposto para analisar portfólio de média-variância (MPV), ignorou a principal característica de experimentos com misturas. Este recurso refere-se ao poder de experimentos para lidar com erros em uma estimação de parâmetros. Quando esse tipo de ruído é apresentado nos experimentos, obtém-se um modelo estatístico para análise MPV em curso. Por exemplo, se os erros aleatórios são considerados na estimação da média e covariância, pode-se obter um modelo baseado no intervalo de confiança, de modo que o investidor irá tomar decisões com base em níveis de significância e testes de hipóteses.

Black e Litterman (1992) propuseram que o investidor insira suas visões de mercado para a formação do portfólio, o que torna a abordagem, apesar de muito referenciada, subjetiva ao conhecimento relativo ou suposições dos investidores.

Neste sentido, a contribuição deste trabalho é estabelecer, por meio da desirability abordagem, uma ligação entre a teoria MPV tradicional e otimização multiobjetivo. A abordagem de otimização proposto neste trabalho permite lidar com o erro na estimação de parâmetro e permite ao analista um robusto processo de tomada de decisão. Assim, o trabalho tem como objetivo generalizar a abordagem proposta por Oliveira et al. (2011), utilizando as características de experimentos planejados para lidar com erros de estimação de parâmetros.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 analisa os fundamentos do modelo MPV, ligando esta abordagem de experimentos com misturas. A Seção 3 discute como se pode aplicar a função desirability para seleção de portfólio. A Seção 4 apresenta alguns exemplos numéricos de abordagens propostas aplicadas à análise de portfólio. O papel do erro de estimação e como a abordagem proposta pode ajudar o analista no processo de tomada de decisão são explorados na Seção 5. Seção 6 discute dados de ações reais. Finalmente, a seção 7 oferece algumas conclusões.

MATERIAIS E MÉTODOS

Análise de carteira com base em projeto de experimentos com misturas

Teoria Carteira procura gerenciar o risco em um grupo de ativos, de modo a determinar uma combinação que oferece o menor risco e o maior retorno esperado. Esse grupo é chamado de uma carteira ótima. A carteira de ativos é uma combinação de ativos de interesse, cada um com um retorno realizado r_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). O retorno da carteira, doravante denotado por r_p , é a média

ponderada do retorno do ativo componente com as proporções de investimentos como pesos w_i . Organizando r_i e w_i em vetores de coluna $\mathbf{r}^T = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]$ e $\mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$, o retorno do portfólio r_p pode ser definido pela **Equação (1)**.

$$r_p = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{r} \quad (1)$$

Uma indicação da rentabilidade esperada é a média da distribuição de probabilidade do retorno, ou o retorno esperado. A variância da distribuição indica como generalizado são os possíveis resultados em torno da média, isto é, quanto maior for a variância, o mais incerto o resultado. Assim, a variação da distribuição é uma indicação intuitiva do risco envolvido.

Se a taxa de retorno evolui (pelo menos fracamente) estacionária ao longo do tempo, cada retorno ativo pode ser representado por um processo estocástico com retorno esperado $\mu_i = E[r_i]$ e a variância $\sigma_i^2 = E[r_i^2] - E[r_i]^2$. Além disso, considerando a covariância entre os ativos i e j , $\sigma_{ij} = E[r_i r_j] - E[r_i]E[r_j]$, o retorno esperado da carteira e sua variância pode ser escrita como:

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \cdot \boldsymbol{\mu} \quad (2)$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (3)$$

No qual $\boldsymbol{\mu}^T = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$, e $\boldsymbol{\Sigma}$ representa a matriz de covariância, na diagonal principal σ_i^2 , e no restante a σ_{ij} .

Note-se que a covariância σ_{ij} mede quantos dos retornos de dois ativos se movem em relação uns aos outros. Esta é a abordagem do bem conhecido modelo MPV de Markowitz, estabelecendo a melhor estratégia para minimizar o risco e maximizar o retorno. Ao seguir esta abordagem, chega-se a fronteira eficiente, onde para um dado nível de variância, não existe outra carteira com maior retorno esperado. Da mesma forma, para um dado nível de retorno esperado, não existe outra carteira com menor variância. **Figura 1** descreve a fronteira eficiente, representada pela linha sólida. **Figura 1** também mostra fronteira ineficiente, onde para uma dada variância, tem-se o menor retorno da carteira viável.

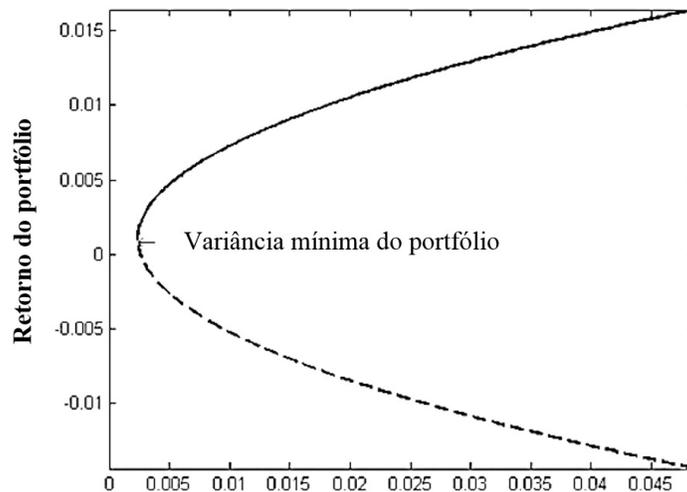


Figura 1 - Fronteira eficiente no espaço média-variância.

Análise de carteira com base em experimentos com misturas

Suponha agora os pesos ou valores w_i MPV do modelo são considerados proporções de uma mistura com as restrições de convexidade, por exemplo, $\sum_i w_i = 1$, e $w_i \geq 0$. Este é exatamente o caso de um projeto experimental conhecido como MDE.

MDE é um tipo especial de experiência de superfícies de resposta em que os fatores são proporções dos componentes numa mistura de (Myers & Montgomery, 2002; Cornell, 2002). Avaliando a resposta do ensaio para os efeitos de vários fatores sendo combinadas, pode-se estimar a superfície de resposta do processo em análise. O desenho é escolhido de tal forma que os pontos estão distribuídos ao longo de um espaço experimental viável. Em MDE, este espaço viável é conhecido como o espaço simplex. Simplex-centroide e simplex-rede são amplamente utilizados na análise de projetos MDE. A fim de obter um modelo polinomial de, pelo menos, do grau m com q componentes, deve-se ter $m + 1$ valores igualmente espaçadas para cada componente mistura. A

Figura 2 mostra um *simplex lattice* com $\{q, m\}$ combinações, em que $q = 3$ e $m = 2$.

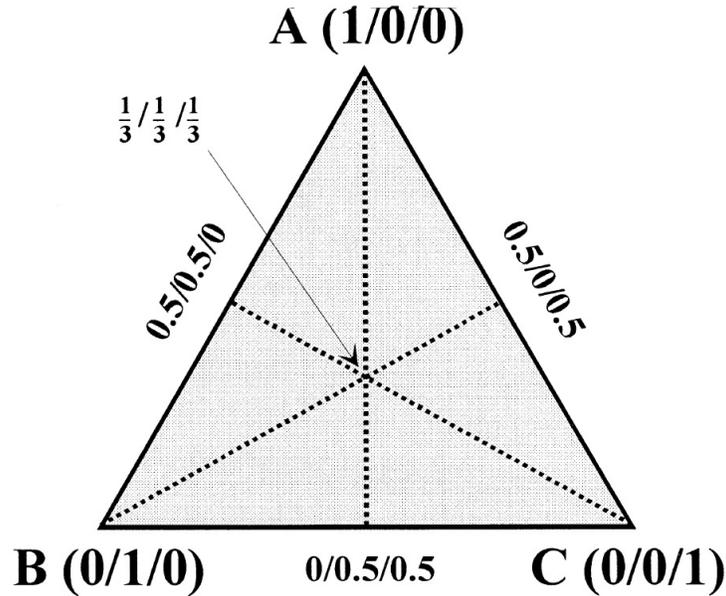


Figura 2 - Análise da mistura *simplex-lattice* para três fatores.

O espaço representado na **Figura 2** pelo experimento descreve componentes de mistura para o sistema de coordenadas simplex. Os vértices da região convexa representam a mistura pura; os pontos dentro da região são as misturas em que nenhum dos componentes está ausente. O centroide é a mistura com proporções iguais de cada componente.

Uma vez que as experiências são realizadas, MDE permite estabelecer a relação entre as variáveis de resposta e a proporção relativa dos componentes em termos de uma equação matemática. Ele proporciona a identificação da influência sobre a variável da proporção de cada um dos fatores e as interações entre os fatores de resposta. Geralmente, a relação entre a função e a variável de resposta e as proporções de n fatores é definido por uma expressão polinomial de grau m , o qual pode ser estimado com a ajuda, dependendo dos objetivos do praticante, de uma regressão linear, quadrática, ou cúbica. A **Equação (4)** descreve o modelo quadrático para a estimação da superfície de resposta.

$$y_p = \beta^{*T} w + w^T B w + \varepsilon = \sum_{i=1}^n \beta_i^* w_i + \sum_{i,j=1,i < j}^q \beta_{ij}^* w_i w_j + \varepsilon \quad (4)$$

Os coeficientes β_i^* mostram como cada componente contribui para a variável de resposta. Da mesma forma, os termos β_{ij}^* indicam que a interação entre fatores i e j . Se um polinomial de ordem mais elevada é usada, componentes, tais como β_{ijk}^* descrever as interações entre os fatores i , j , e k , assim por diante. Recorde, então, que o q refere-se ao número de componentes na mistura. Finalmente, representa erros aleatórios, que são independentes e identicamente distribuídos. Esses coeficientes podem ser avaliados com a ajuda do comum dos mínimos quadrados algoritmo ou método da máxima probabilidade.

Note que o modelo da **Equação (4)** é apresentado como um polinômio canônica, que foi introduzido pelo Scheffé (1958), para ser usado com o simplex lattice. A grande vantagem em utilizar polinômios canônicos é que nenhum componente na mistura é suprimido a partir do modelo de regressão, de modo que nenhuma informação sobre os componentes é sacrificado.

Quando comparamos o MDE para a abordagem tradicional MPV, é muito simples que as equações de média-variância podem ser escritas como uma mistura de superfície de resposta, onde os valores de investimento de capital em ativos são definidos pelo tipo de delineamento de misturas (rede simplex ou simplex centroide). Além disso, a restrição orçamentária é análoga à restrição de convexidade de MDE. Uma vez que o projeto mistura é definida, pode-se estimar a superfície reposita da média, variância e qualquer outra resposta de interesse, de modo que se pode ter a influência de cada ativo no desempenho da carteira. No entanto, o modelo tradicional considerando MDE não permitir, por exemplo, a venda a descoberto na análise de portfólio, portanto, uma generalização deve ser considerada.

Modelo Generalizado de Análise de Portfólio Baseado em Projeto de Experimentos de Mistura

A seção anterior apresentou a correspondência entre MDE e carteira de análise. Foi discutida análise de portfólio de posições compradas com a ajuda de MDE. Quando opera comprado, o investidor ganha dinheiro quando os aumentos de preços de ativos, ou seja, ele / ela compra o ativo a um preço baixo e espera vendê-lo mais tarde a um preço mais elevado.

Na prática, no entanto, situações fora do tempo de compra podem ser desejável e com a abordagem básica MDE aquém de considerar operações curtas. Num curto espaço de operação, um lucro em Vestor, quando os preços dos ativos caem. Nesta situação, se vende um ativo sem possuí-lo, mas, na verdade, por ter emprestado de um corretor. A posição é fechada quando o investidor compra o ativo, dando-lhe, assim, volta para o credor.

É em relação a esse de compra e venda que esta seção discute o modelo geral para otimização de portfólio por meio de MDE. Por esta causa, o domínio experimental pode ser expandido e restrições lineares devem ser considerados.

A primeira diferença das preocupações tradicionais MDE os valores dos pesos w_i . Nas operações de curto, os pesos nas **Equações (1), (2) e (3)** pode assumir valores negativos, de maneira que a restrição $w_i \geq 0$ já não é cumprida. Quando venda a descoberto é permitida, os pesos pertencer a intervalos indicados pela:

$$-sl \leq w_i \leq [1 + (q - 1) \cdot sl] \quad (5)$$

Na qual $sl \in \mathfrak{R}_+$ e representa o limite de venda a descoberto. Note, que este novo limite de peso expande região simplex, onde se pode vender sua riqueza em alguns ativos para comprar outros ativos. Além da nova região de cada variável, a simplex-estrutura é também limitado pela superfície $\sum_i w_i = 1$. Assim, a região da estrutura expandida é restringida por equação de equilíbrio da carteira. A **Figura 3** demonstra o caso particular com $q = 3$, $m = 2$ e $sl = 1$.

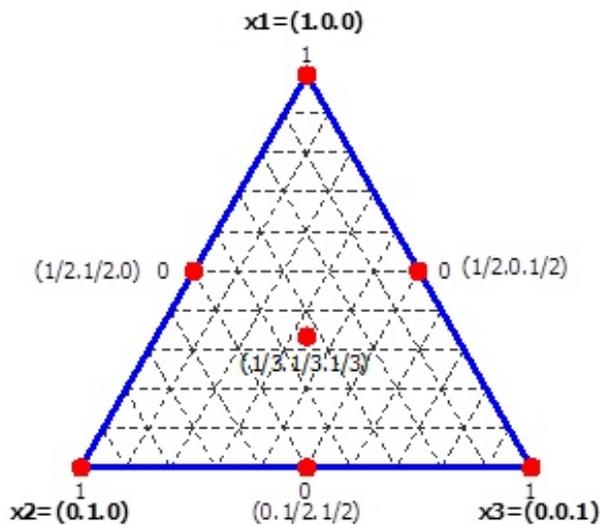


Figura 3 - Mistura tipo *lattice* para análise de portfólio com três fatores.

Para construir este projeto experimental, como na **Figura 3**, pode-se definir o $q-1$ pesos como em modelos *simplex-lattice* tradicionais, considerando os novos limites variáveis de desigualdade (5) e o q^{th} componente é constringida por uma equação de equilíbrio, de modo que $w_q = 1 - \sum_{j=1}^{q-1} w_j$. Note-se também, pela **Figura 3**, que o *simplex-lattice* de MDE tradicional está contida na região da estrutura expandida.

O delineamento experimental discutido acima preenche a lacuna na análise de portfólio que envolve a venda a descoberto. Desde que o projeto generaliza a MDE para otimização de portfólio, é a seguir designado como o projeto mistura generalizada de experimentos para a carteira otimização (GMDEPO).

Uma vez que são realizados os experimentos, GMDEPO permite o estabelecimento da relação entre as respostas de interesse e proporção relativa dos componentes em termos de um modelo matemático, como na **Equação (4)**.

Ele fornece para a identificação, em termos da variável de resposta, proporcional a influência de cada fator e as interações entre os fatores.

Função *desirability* para portfolio multi-objetivo

A concepção ideal de uma carteira pode ser vista como uma tarefa de otimização multi-objetivo não linear que simultaneamente minimiza os riscos e maximiza o rendimento. Para conseguir tal objetivo, as equações de risco e de retorno são geralmente combinados na forma de uma função *desirability*, tais como $U = \lambda\mu_p + 0.5\sigma_p^2$, no qual λ é o fator de ponderação que reflete a preferência do tomador de decisão ou a aversão ao risco. Ao lidar com GMDEPO, também podemos adaptar os conceitos de retorno, risco e utilidade através de uma função *desirability*. Esta função é uma transformação de otimização multi-objetivo que permite a combinação de risco e retorno e também permite a introdução de aversão do investidor ao risco. Além disso, podem-se definir as regiões e faixas de respostas para cada resposta, permitindo o uso de modelos estatísticos e níveis de confiança.

Usando um conjunto de transformações com base nos limites impostos sobre as respostas, a conversão é realizada para cada uma das respostas, resultando numa função de preferência indivíduo d_i com $0 \leq d_i \leq 1$. Estes valores individuais são então combinados com uma média geométrica, tal como:

$$D = [d_1(y_1) \times d_2(y_2) \times \dots \times d_k(y_k)]^{1/k} \quad (6)$$

O índice global D é uma função convexa, e é maximizado utilizando um algoritmo de Hooke de forma irrestrita e não linear, Jeeves (Rao, 1996). Ele trará uma solução de compromisso e é restringida ao intervalo $[0, 1]$. O índice D é próximo de 1 quando as respostas estão perto de sua especificação. O tipo de transformação depende da direção de otimização desejada.

Para um problema de otimização, a abordagem da função *desirability* é simples, fácil de aplicar, e permite que o usuário julgar a importância de cada resposta. Para o caso de maximização, por exemplo, a transformação é desejável, d_i será:

$$d_i = \begin{cases} 0 & \hat{y}_i < L_i \\ \left[\frac{\hat{y}_i - L_i}{T_i - L_i} \right]^{c_i} & L_i < \hat{y}_i < T_i \\ 1 & \hat{y}_i > T_i \end{cases} \quad (7)$$

No qual \hat{y}_i representa a resposta predita de interesse¹, e L_i e T_i são, respectivamente, o limite inferior e a meta para a i exima resposta de interesse. Além disso, c_i são os pesos, a importância da resposta em função do *desirability*. Se $d_i > 1$, então a i exi-

¹ Retorno do portfólio, por exemplo.

ma resposta é mais relevante. Por outro lado, se $0 < d_i < 1$, a i exima resposta é menos relevante. Finalmente, quando $d_i = 1$, a i exima resposta comporta-se de forma linear a partir de limite inferior para atingir. A **Figura 4** resume as dinâmicas de d_i .

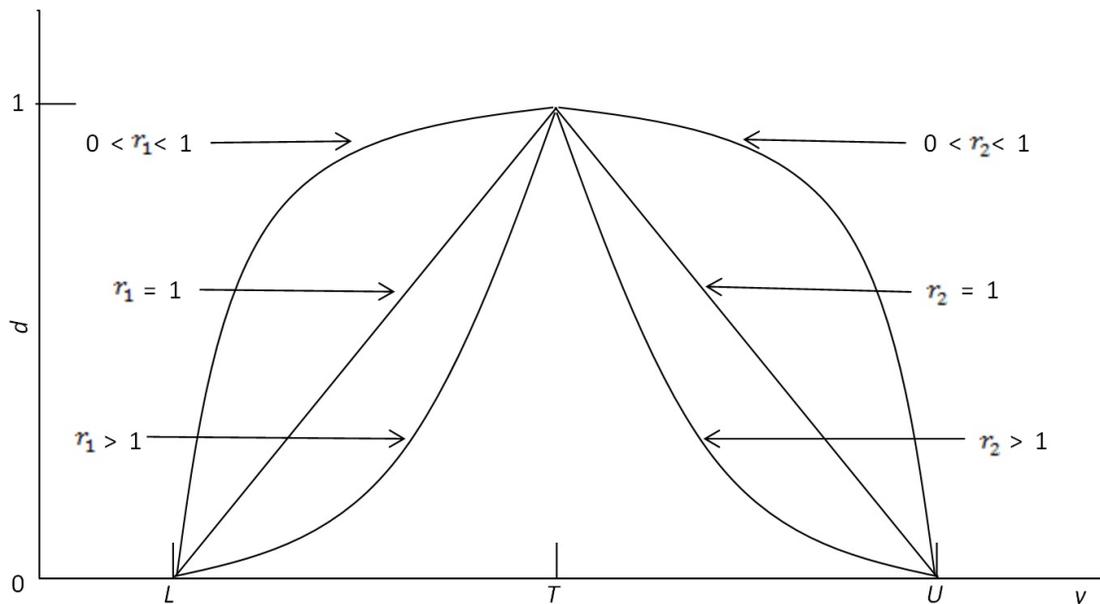


Figura 4 - Dinâmica do d_i .

Na análise de portfólio, GMDEPO fornece o modelo estatístico para as respostas do retorno esperado e medida de risco. Assim, na carteira de otimização, a função de preferência pode ser utilizada como uma ferramenta de otimização multiobjetivo para GMDEPO. Por isso, os investidores procuram maximizar o retorno esperado de tal forma que os ativos selecionados são relevantes e significativos, ou seja, estão contidos no intervalo de confiança do modelo estatístico. Ao mesmo tempo, os investidores querem montar uma carteira com o menor risco possível. Além disso, o parâmetro c_i pode representar a aversão ao risco. Por exemplo, se se aceitar mais risco, podem-se escolher valores baixos c_i na função de preferência de risco, e, inversamente, se se aceitar valores mais elevados, menos risco de c_i seria preferível.

O papel do erro de estimação

O modelo MPV discutidos neste trabalho depende de dois parâmetros: o vetor dos retornos e a matriz de covariância. Na prática, estes parâmetros não são conhecidos, mas pode ser estimada a partir de dados de históricos de distribuição por meio da teoria de amostragem. Incerteza na estimação de parâmetros pode levar a uma má out-of-sample desempenho da carteira. Na verdade, Jobson e Korkie (1980), Michaud (1989), Chopra e Ziemba (1993) e Melhor e Grauer (1991) foram todos discutidos o impacto do erro de estimação em ótima escolha portfolio, mostrando que ela desempenha um papel importante na seleção de portfólio. Na mesma linha, Lim et al. (2011) mostram que este problema é também observado quando as outras métricas de risco coerentes são utilizadas.

Se a distribuição dos retornos subjacente é assumido ser normal multivariada, a estimação de parâmetros com base nos dados pode ser resumida aos históricos médios retorno e da matriz covariância. Além disso, pode-se, com base no ponto de estimação e horizonte de tempo, construir intervalos de confiança. Assim, podem-se gerar amostras de retornos vector e da matriz covariância e replicar GMDEPO tantas vezes quanto se queira. Esse procedimento pode parecer ingênuo, mas considera apenas o cálculo direto da **Equações (2) e (3)**, e produz um modelo estatístico na construção da fronteira eficiente. Assim, um investidor pode realizar robusto tomada de decisão, considerando-se o erro de estimação.

É simples que, pelo teorema do limite central, média da amostra é normalmente distribuído com valor esperado $E[\bar{x}_i] = \mu_i$ e va-

riância $Var[\bar{x}_i] = \sigma_i^2/n$. Além disso, a proporção $(n-1)s_i^2/\sigma_i^2$, no qual s_i^2 é a variância da amostra, tem distribuição qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade. Considerando agora GMDEPO com ν replicações, em conjunto com a média da amostra e distribuição variância, pode-se estimar modelos estatísticos considerando erro de estimação.

Assim, pode ser aplicado GMDEPO considerando o erro de estimação dos parâmetros de distribuição. Vejamos novamente a exemplo de dados de três ativos da seção anterior. Além de independência entre os retornos dos ativos, ou seja, a média e covariância dos retornos são obtidos a partir de dados históricos de $n = 60$ meses retornos que são assumidas a ser distribuído normalmente. Os parâmetros estimados são agora considerados estatísticas de amostragem, de tal forma que:

$$\bar{r} = [1.05 \quad 1.08 \quad 1.10]^T$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & & \\ & 0.02 & \\ & & 0.03 \end{bmatrix}$$

No qual \bar{r} é o vetor de retorno estimado, enquanto que S^2 é a matriz covariância estimada.

O experimento *simplex-lattice* explorado na **Tabela 1** na qual $q = 3$ e $m = 2$, é replicado 10 vezes, de modo a revelar quaisquer propriedades estatísticas. A **Figura 7** mostra o gráfico de dispersão dos resultados experimentais para o retorno da carteira r_p e variância s_p^2 para cada proporção de ativos, enquanto que a **Figura 6** exibe histogramas para estas medidas.

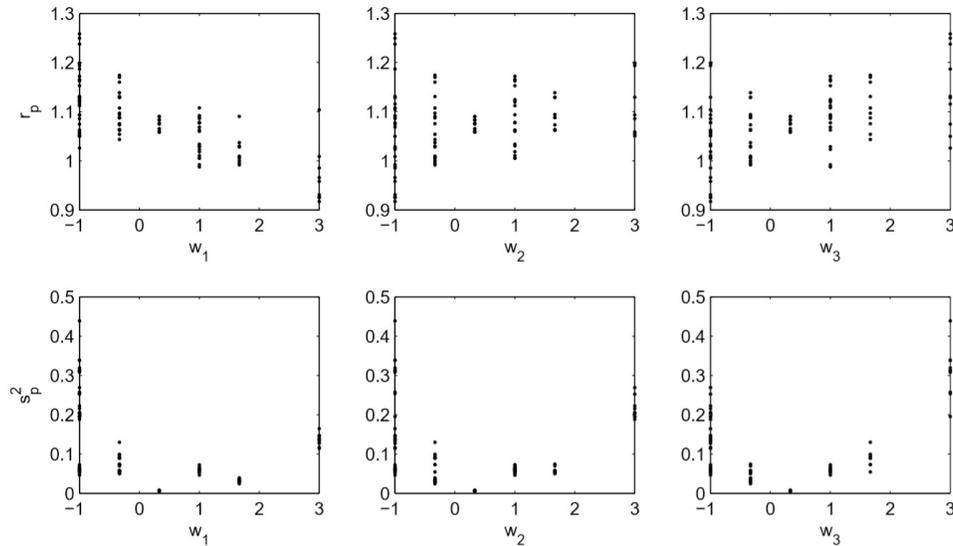


Figura 5 - Gráficos de dispersão de resultados experimentais.

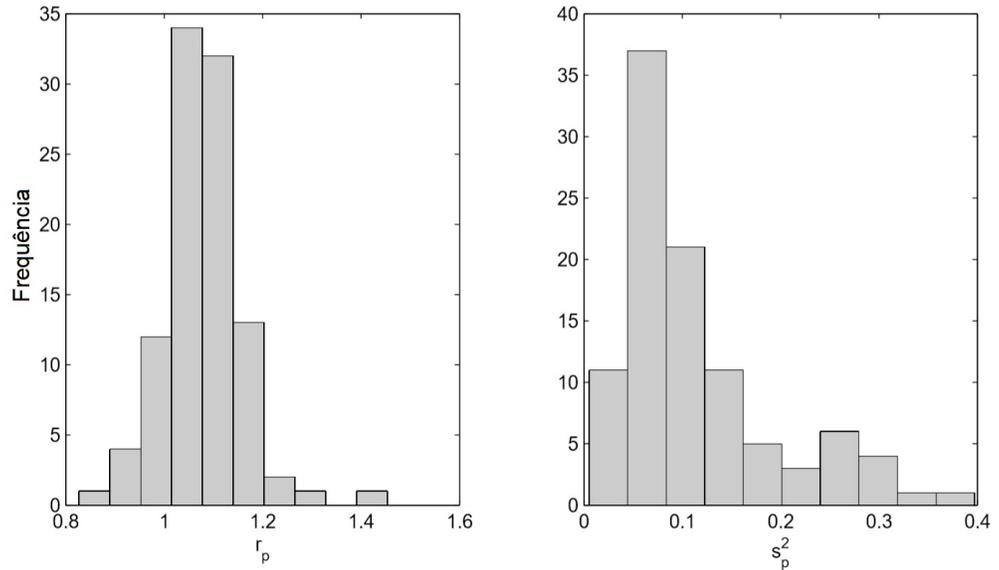


Figura 6 - Histogramas para os resultados experimentais.

Note na **Figura 7** que os resultados experimentais agora apresentarem diversos resultados para as corridas replicadas. Isto é esperado uma vez que cada retorno do ativo e variância está modelada por uma distribuição de amostragem. Além disso, pode-se ver a partir de **Figura 6** enquanto que os retornos da carteira parecem seguir uma variação distribuição simétrica não. Isto também é esperado uma vez que é restrita a variância valores positivos.

Após a discussão acima, o retorno portfolio r_p é primeiramente modelada por regressão linear, considerando as proporções de ativos. Quanto à variância s_p^2 , o modelo com base na equação quadrática (3) é usado.

Lembre-se que a estimação do parâmetro pode ser realizada através da abordagem dos mínimos quadrados ou método de máxima verossimilhança. Ambas as abordagens produzem estimador de parâmetros β_i^* e β_{ij}^* . No entanto, a hipótese de erros aleatórios distribuídos normalmente é violada, uma vez que os resultados de desvio são restritos a valores positivos. Uma alternativa à análise de regressão linear é de modelos lineares gerais, que podem ser utilizados na modelagem da variância. Assim, ao estimar β_i^* e β_{ij}^* , estimação por máxima verossimilhança é preferível. As **Equações (8) e (9)** mostrar os modelos estimados, onde todos os coeficientes são estatisticamente significativos no nível de significância de 5%.

Usando o modelo econométrico dada em **Equações (8) e (9)**, pode-se construir o modelo GMDEPO praticável, como mostrado na **Figura 7**, que também mostra a fronteira eficiente quando apenas a estimação pontual é considerada (**Sessão Error! Reference source not found.**).

$$\hat{r}_p = 1.0523 \cdot w_1 + 1.0684 \cdot w_2 + 1.0957 \cdot w_3 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}_p^2 = & 0.0051 \cdot w_1 + 0.0142 \cdot w_2 + 0.0241 \cdot w_3 - 0.0302 \cdot w_1 w_2 - 0.0399 \cdot w_1 w_3 \\ & - 0.0486 \cdot w_2 w_3 \end{aligned} \quad (9)$$

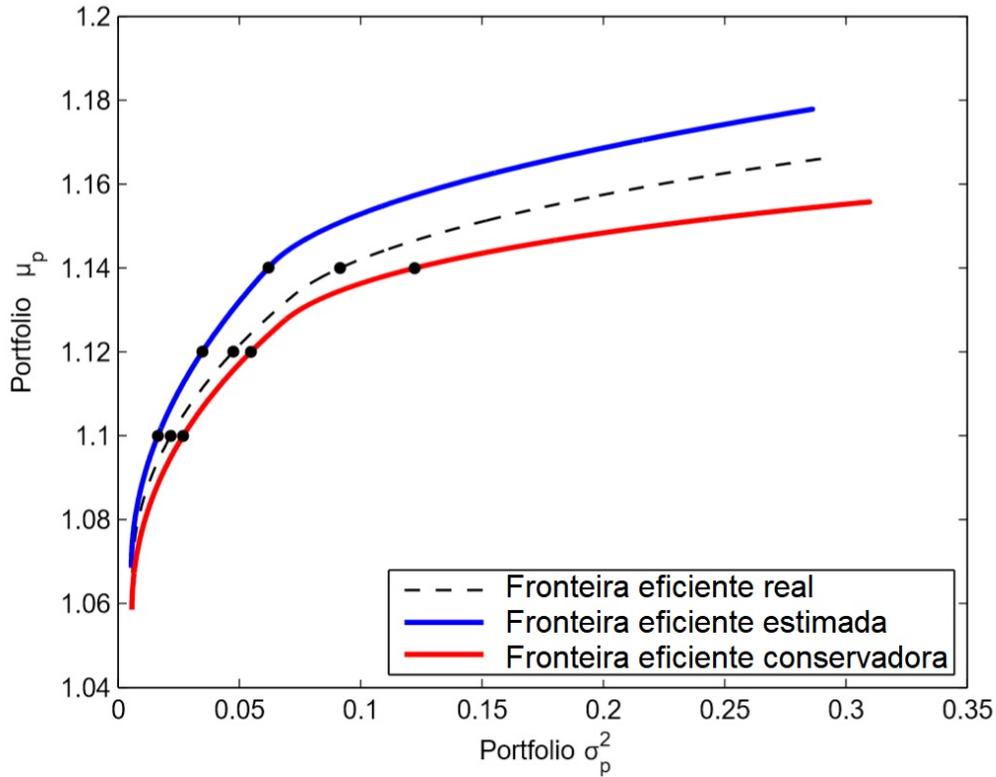


Figura 7 - Carteiras viáveis sob intervalo de estimação.

Note, na **Figura 7**, que, considerando intervalo de estimação para o retorno e variância pode diferir significativamente quando se trata de tomada de decisão. Por exemplo, suponha que um investidor procura um retorno de 12%. Considerando a fronteira estimada com base em modelos de regressão de **Equações (8) e (9)**, esse investidor vê uma variação do risco de 0,036. No entanto, no modelo verdadeiro, é cerca de 0,043, o que é 20% maior. Se o investidor já sabe a verdadeira variância, ele / ela pode decidir de forma diferente. De facto, dependendo do declive da fronteira eficiente, o analista possa ser conduzido a um resultado muito diferente do que era esperado.

Ao lidar com erro de estimação, os analistas podem usar o intervalo de confiança da resposta média, ou seja, os analistas podem calcular os limites inferior e superior da resposta média estimada em um nível de confiança. A **Equação (10)** dá a variância da carteira de retorno estimado em w_0 .

$$var(\hat{r}_p) = s_{r_p}^2 w_0^T (W_{r_p}^T W_{r_p})^{-1} w_0 \quad (10)$$

Na **Equação (10)**, w_0 é o vetor de pesos de cada ativo, conforme definido na **Seção** Error! Reference source not found., $s_{r_p}^2$ é a variância estimada a partir do modelo de regressão de retorno da carteira, dada pela **Equação (8)**, e W_{r_p} é a matriz $n \times p$ dos níveis de pesos ativos, obtidos a partir de um polinómio canónica. Assim, o $(1 - \alpha)$ intervalo de confiança sobre a resposta média em w_0 é obtido com:

$$\mu_p = r_p(w_0) \pm t_{\alpha/2, n-p} \cdot \sqrt{s_{r_p}^2 w_0^T (W_{r_p}^T W_{r_p})^{-1} w_0} \quad (11)$$

Em que $t_{\alpha/2, n-p}$ representa a distribuição t inverso ao nível $\alpha/2$ com $n - p$ graus de liberdade.

Uma fórmula semelhante pode ser obtida para a carteira de variância, conforme mostrado na **Equação (12)**.

$$\sigma_p^2 = s_p^2(\mathbf{w}_0) \pm t_{\alpha/2, n-p} \cdot \sqrt{s_{s_p^2}^2 \mathbf{w}_0^T \left(\mathbf{W}_{s_p^2}^T \mathbf{W}_{s_p^2} \right)^{-1} \mathbf{w}_0} \quad (12)$$

Assim, utilizando as **Equações (11) e (12)**, pode-se controlar o nível de confiança da fronteira eficiente. Por exemplo, a **Figura 7 - Carteiras viáveis sob intervalo de estimação**, ainda mostra o intervalo de confiança de 95% de média estimada e a variância dada pelas **Equações (8) e (9)** como linhas pontilhadas. Esta figura também mostra a fronteira esperada (linha contínua fina) e a verdadeira fronteira (linha pontilhada).

Usando a abordagem de intervalo de confiança, o investidor que procura um retorno de 12% iria ver uma variação de risco de 0,050 na variância limite superior. Assim, o processo de tomada de decisão pode ser feito com um maior nível de precisão. De fato, o intervalo de confiança de abordagem permite ao analista a se envolver em testes de hipóteses para qualquer decisão, permitindo-lhe tomar decisões de forma mais robusta.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Experiência numérica com GMDEPO

Nesta seção, GMDEPO é usada com dados de 13 ações, os dados coletados a partir do site da Bolsa de Valores de São Paulo BM&FBovespa. As ações selecionadas são as mais negociadas, compondo o principal índice do mercado local brasileiro, conhecido como IBovespa. Os dados são tomados em junho de 2009 a dezembro de 2012.

A fim de gerar amostras de vetor de retorno e matriz de covariância, pode-se utilizar a simulação ou de bootstrap (paramétrico ou não paramétrico) técnicas de Monte Carlo. O primeiro utiliza o ponto de estima para gerar amostras aleatórias, considerando a Cadeia de Markov e a distribuição subjacente assumido. Os últimos resamples de funções de distribuição paramétrica ou empírica. A ideia de bootstrap, proposto por Efron (1979), significa se aproximar de uma amostra de distribuição de interesse, simulando o processo de geração de dados. Como este trabalho não se concentra na modelagem de ativos de retorno, em outros resultados numéricos, a inicialização ingênua é então considerada. Nesta abordagem, é feito de reamostragem com base na função de distribuição empírica com a substituição, então se pode construir uma amostra de qualquer tamanho a partir dos dados originais. Além disso, a análise que se segue considera apenas o intervalo de confiança de retorno esperado.

Uma vez que as amostras de bootstrap são gerados, a estimação de retornos de ativos e covariância são realizadas, para que se possa, em seguida, aplicar GMDEPO. No caso analisado nesta seção, GMDEPO com $q = 13$ e $m = 2$ é realizada. Nós escolhemos esses números porque queremos selecionar uma carteira ótima de 13 ações e a variância é uma função quadrática dos dados. Além disso, a venda a descoberto é permitida $sl = -1$. Este projeto experimental yields 105 funciona e é replicado 10 vezes. Uma vez que as corridas são calculadas, pode-se estimar o comportamento esperado da média e variância, assim seus intervalos de confiança.

A **Figura 10** ilustra a fronteira de eficiência estimada (linha contínua) e seu intervalo de confiança (linhas pontilhadas), utilizando os dados de 13 ações e também mostra a carteira otimizada com diferentes aversão ao risco utilizando a função desirability discutido na **Seção 0**. Os pontos representam os pontos ideais em retorno esperado, ao passo que \times refere-se ao robusto retorno esperado para a carteira ótima considerando intervalo de confiança. A **Tabela 1** detalha os resultados.

A **Tabela 1** mostra os resultados otimizados para quatro diferentes cenários de aversão ao risco do investidor, de acordo com c_1 e c_2 combinações. Ademais, \hat{r}_p e \hat{s}_p^2 referem-se ao portfólio retorno esperado e variância, obtidos a partir de análise GMDEPO, enquanto \hat{r}_p^* representa o forte retorno esperado, ou seja, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% para o retorno da carteira e o intervalo de confiança superior a 95% para a carteira de variância. Finalmente, através da função desirability, representa a proporção de ativos na carteira otimizado.

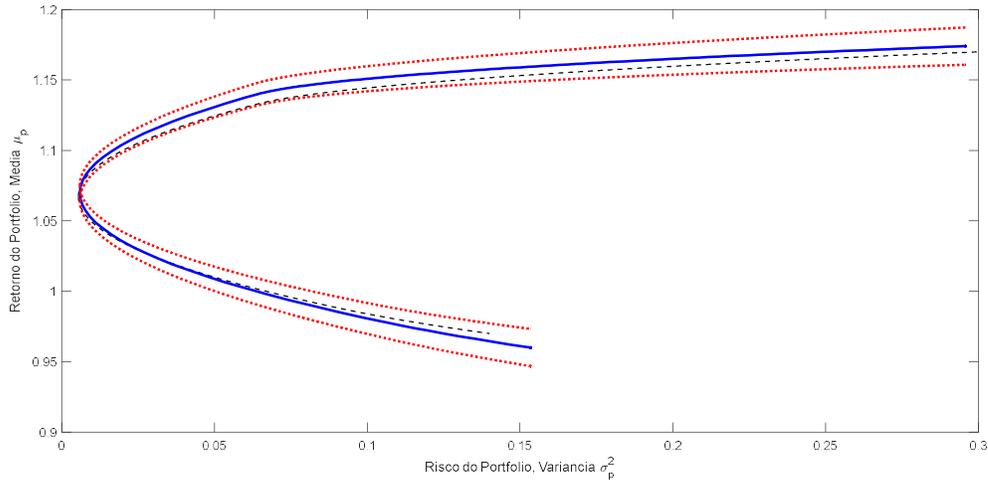


Figura 10 - Fronteira estimadas e intervalo de confiança.

Veja, na **Tabela 2**, que os valores mais elevados para c_1 , a menor aversão do investidor ao risco, ou seja, o investidor se envolve em mais vendas a descoberto. Por exemplo, conforme c_1 move-se de 0.50 para 5.00, as proporções das ações w_3 estão se tornando mais negativa, e as proporções de ativos w_8 e w_9 mover-se de tempo para operações curtas. Note, também, que o robusto retorno esperado é de cerca de 1,27%, menor do que o retorno esperado para o Caso A. Ou seja, o retorno esperado é de 12,13%. No entanto, considerando o erro na estimação de parâmetros, o intervalo de confiança de 95% dá um retorno de 10,71%.

A diferença entre a expectativa e confiante retorno da carteira é ainda maior no processo D, onde a diferença é de -1,45%. De fato, como o investidor aceita mais risco, mais incerta é o desempenho da carteira. Esta conclusão decorre da abordagem distribuição de amostragem para gerar os dados utilizados nesta simulação. Se um ativo apresenta uma variação mais alta, o intervalo de estimação da média mostra um intervalo de confiança maior (até no mesmo nível de confiança), tornando mais incerteza e risco no modelo média estimada. Curiosamente, a função desirability capacita a lidar com este tipo de problema. Como se pode ver a partir da **Figura 0**, uma vez que a resposta otimizado é obtido, o nível de confiança pode ser considerada para processar uma fronteira robusta esperada, onde o investidor pode tomar decisões em um nível mais alto de precisão.

Tabela 1 - Respostas ótimas considerando dos erros de estimação

Caso	A	B	C	D
c_1	0.5000	1.0000	2.0000	5.0000
c_2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
\hat{r}_p	1.1213	1.1493	1.1779	1.2097
\hat{r}_p^*	1.1071	1.1341	1.1618	1.1921
\hat{S}_p^2	0.0311	0.0682	0.1194	0.1924
w_1	0.8224	1.0393	1.2593	1.5044
w_2	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000
w_3	-0.1040	-0.2665	-0.4497	-0.6539
w_4	0.4515	0.4872	0.4846	0.4814
w_5	0.2438	0.0331	-0.2222	-0.5070

w_6	-0.8713	-0.9998	-1.0000	-1.0000
w_7	0.6008	0.7606	0.9258	1.1099
w_8	0.0475	-0.0972	-0.2676	-0.4576
w_9	0.4592	0.2040	-0.0792	-0.3952
w_{10}	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000
w_{11}	0.8524	1.0847	1.3271	1.5973
w_{12}	0.3549	0.6013	0.8674	1.1639
w_{13}	0.1430	0.1527	0.1546	0.1565

CONCLUSÕES

Este artigo apresenta como uma ferramenta na seleção de portfólio, o projeto mistura geral de experimentos para a otimização de portfólio (GMDEPO). Sua contribuição é permitir que o analista de lidar com erro de estimação. A abordagem proposta é baseada em experimentos com mistura e metodologia de superfície de resposta, para que se possa estimar portfólio retorno esperado, variância, e seus intervalos de confiança. Otimização de portfólio é então realizada com a ajuda da função desirability, que é uma transformação de otimização multiobjetivo que permite a combinação de risco e retorno e também permite a introdução de aversão do investidor ao risco.

Para discutir as características de GMDEPO em lidar com erros de estimação, este estudo apresentou um exemplo numérico com três ativos. O exemplo demonstrado, como amplamente discutido na literatura, que os parâmetros de incerteza levar a estimações erradas de fronteiras eficientes. Por esta causa, os intervalos de confiança de estimação de variância e retorno da carteira podem conduzir a uma estimação mais segura da fronteira, permitindo que mais robusto tornar os investidores de decisão.

A abordagem GMDEPO foi então aplicado a alguns dados de ativos reais de São Paulo bolsa BM&FBovespa. É importante ressaltar, no entanto, que, apesar de ter usado dados reais, o caso discutido é hipotético, uma vez que as distribuições de retorno foram mal modeladas. Na verdade, o objetivo deste trabalho foi mostrar o poder de GMDEPO na análise de portfólio sob parâmetros de incerteza.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pelas agências brasileiras (CNPq, CAPES, projeto 12875-13-9).

REFERÊNCIAS

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Haeth, D., 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9 (3), 203–228.
- Abdelaziz, F.B., Aouni, B., Fayedh, R.E., 2007. Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research* 177, 1811–1823
- Bai, Z.D., Liu, H.X., Wong, W.K., 2009. Enhancement of the Applicability of Markowitz's Portfolio Optimization by Utilizing Random Matrix Theory. *Mathematical Finance* 19(4), 639-667.
- Ben-Tal, A., and Nemirovski, A., 1998. Robust Convex Programming, *Mathematics and Operations Research*, Vol. 23, pp. 769–805.
- Benati, S., Rizzi, R., 2007. A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem, *European Journal of Operational Research* 176 423–434.
- Bera, A. K., Park, S. Y., 2008. Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econometric Reviews*, 27, 484-512.

- Best, M.J., Grauer, R.R., 1991. On the sensitivity of mean–variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *Review of Financial Studies* 4, 315–342.
- Best, M.J., 2010. *Portfolio Optimization*, Chapman & Hall / CRC Finance, New York.
- Best, M.J., Zhang, X., 2011. Degeneracy Resolution for Bilinear Utility Functions. *Journal of Optimization theory and Applications*, 150, 615-634.
- Best, M. J., Hlouskova, J., 2003. Portfolio Selection and Transactions Cost. *Computational Optimization and Applications*, 24, 95-116.
- Best, M. J., Hlouskova, J., 2005. An Algorithm for Portfolio Optimization with Transactions Cost. *Management Science*, 51 1676-1688.
- Branke, J., B. Scheckenbach, B, Stein, M., Deb, K., Schmeck, H, 2009. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm, *European Journal of Operational Research* 199, 684–693.
- Briec, W., Kerstens, K., Jokung, O., 2007. Mean–variance–skewness portfolio performance gauging: A general shortage function and dual approach. *Management Science* 53, 135–149.
- Brown, D.B and Smith, J. E., 2011. Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds, *Management Science* 57:1752-1770
- Cornell, J.A., 2002. *Experiments with Mixtures: Design, Models, and the Analysis of Mixture Data*. New York.
- Efron, B., 1979. Bootstrap methods: another look at jackknife. *The Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- Goldfarb, D. and Iyengar, G., 2003. Robust Portfolio Selection Problems, *Mathematics and Operations Research*, 28 (1), 1-38.
- Gondzio, J., Grothey, A., 2007. Solving non-linear portfolio optimization problems with the primal-dual interior point method, *European Journal of Operational Research* 181 1019–1029.
- Grubb, M., Butler, L., Twomey, P., 2006. Diversity and security in UK electricity generation: The influence of low-carbon objectives. *Energy Policy*, 34, 4050-4062.
- Halldórsson, B.V., and Tutuncu, R.H., 2003. An Interior-Point Method for a Class of Saddle-Point Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 116 (3) 559-590.
- Hickey, E. A., Carlson, J. L., Loomis, D., 2010. Issues in the determination of the optimal portfolio of electricity supply options. *Energy Policy*, 38, 2198-2207.
- Janal, P., Roy, T. K., Mazumder, S. K., 2007. Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. *Advanced Modeling and Optimization*, 9, 181-193.
- Jobson, J.D., Korkie, B., 1980. Estimation for Markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association* 75, 544–554.
- Kerstens, K., Mounir, A. Woestyne, I.V., 2011. Geometric representation of the mean–variance–skewness portfolio frontier based upon the shortage function. *European Journal of Operational Research* 210, 81–94.
- Krokhmal, P., Zabarankin, M., Uryasev, S., 2011. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 16, 49-66.
- Lai, K.K., Yu, L., Wang, S., 2006. Mean-variance–skewness–Kurtosis-based portfolio optimization. *IEEE First International Multi-Symposium on Computer and Computational Sciences*.
- Lim, A. E.B., Shanthikumar, J. G., Vahn, G.-Y., 2011. Conditional value-at-risk in portfolio optimization: Coherent but fragile. *Operations Research Letters* 39, 163–171.
- Lin, C.C., Liu, Y.T. 2008. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 185, 393–404.
- Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77–91.
- Markowitz, H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York.
- Montgomery, D. C., 2009. *Design and Analysis of Experiments*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 656 p.
- Myers, R.H., Montgomery, D.C., 2002. *Response Surface Methodology*, 2nd ed. Wiley, New York.

- Oliveira, F. A., Paiva, A. P., Lima, J. W. M., Balestrassi, P. P., Mendes, R. R. A., 2011. Portfolio optimization using Mixture Design of Experiments: Scheduling trades within electricity markets. *Energy Economics*, Volume 33, 24-32.
- Piepel, G.F., 1988. Programs for generating extreme vertices and centroids of linearity constrained experimental region. *Journal of Quality Technology*, 20, 120-139.
- Rockafellar R, Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance* 2002;26:1443–71.
- Scheffé, H., 1958. Experiments with Mixtures, *Journal of Royal Statistical Society. Series B*, 20, 344-360.
- Stirling, A., 1994. Diversity and ignorance in electricity supply investment. *Energy Policy*, 22, 195-216.
- Soyer R., Tanyeri, K., 2006. Bayesian portfolio selection with multi-variate random variance models. *European Journal of Operational Research*, 171, 977–990.
- Zhang, W.G., Zhang, X.L., Xiao, W.L., 2009. Portfolio selection under possibilistic mean–variance utility and a SMO algorithm, *European Journal of Operational Research* 197, 693–700.
- Zhang, W.G., Liu, Y.J., Xu, W.J., 2012. Portfolio selection under possibilistic mean–semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs, *European Journal of Operational Research* 222, 341-349.